مهندس علی عاقلی

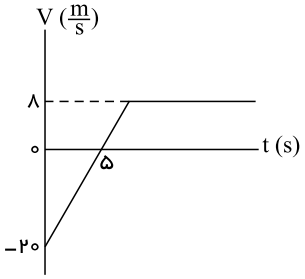
کد اجرا: نامشخص

نام و نام خانوادگی:

۱ معادلهٔ حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x = ۳t^۲ - ۱۲t + ۹$ است. تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۱s$ تا $t_۲ = ۴s$، چند متر بر ثانیه است؟ سراسری- ۱۴۰۲

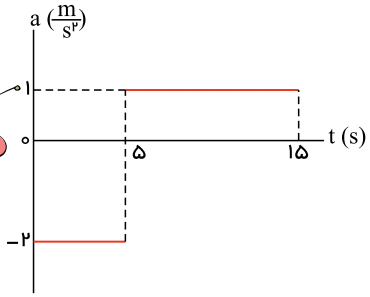
۱) ۵ ۲) ۸ ۳) ۳ ۴) ۶

۲ شکل زیر، نمودار سرعت - زمان متحرکی است که روی محور x حرکت می‌کند و در مبدأ زمان، از مکان $x = +۴۲m$ گذشته است. در این حرکت، چند ثانیه فاصلهٔ متحرک تا مبدأ محور، کمتر یا مساوی ۱۰ متر است؟ سراسری- ۱۴۰۲



۱) ۵
۲) ۵٫۲۵
۳) ۶
۴) ۶٫۲۵

۳ نمودار شتاب زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر سرعت و مکان متحرک در لحظهٔ $t = ۰$، برابر $\vec{v}_۰ = (۱۰\frac{m}{s})\vec{i}$ و $\vec{x}_۰ = (-۱۰)\vec{i}$ باشد، در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰s$ تا $t_۲ = ۱۵s$ کدام موارد درست است؟ سراسری- ۱۴۰۲



الف: جهت بردار مکان و بردار سرعت یک بار عوض می‌شود.

ب: جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه‌اند.

پ: شتاب متوسط برابر صفر است.

ت: سرعت متوسط برابر صفر است.

۱) «ب» و «ت» ۲) «ب» و «پ» ۳) «الف» و «ت» ۴) «الف» و «پ»

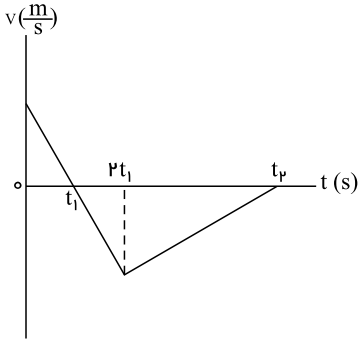
۴ هواپیمایی با سرعت $۶۰\frac{m}{s}$ روی باند فرودگاه می‌نشیند و با شتاب ثابت، سرعت خود را کاهش می‌دهد تا متوقف شود. اگر هواپیما، ۳۲ متر پایانیِ مسیر مستقیم خود را در مدت ۴ ثانیه طی کرده باشد، مسافتی که هواپیما روی باند پیموده، چند متر است؟ سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۴۵۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۷۵۰ ۴) ۸۰۰

۵ متحرکی روی محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند، اگر در لحظه‌های $t_۱ = ۲s$ ، $t_۲ = ۴s$ و $t_۳ = ۶s$ مکان‌های متحرک به‌ترتیب $x_۱ = ۵۴m$ ، $x_۲ = ۶۴m$ و $x_۳ = ۵۴m$ باشد، بزرگی سرعت متوسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟ سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۵

۶ نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. اگر بزرگی شتاب در بازهٔ زمانی صفر تا t_1، ۲ برابر بزرگی شتاب $2t_1$ تا t_2 باشد، تندی متوسط در بازهٔ صفر تا t_1 چند برابر تندی متوسط در بازهٔ t_1 تا $2/5t_1$ است؟ سراسری- ۱۴۰۲



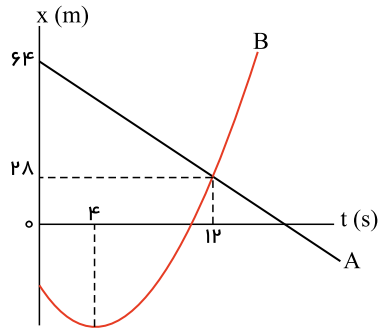
۱) $\frac{۷}{۱۲}$

۲) $\frac{۵}{۸}$

۳) $\frac{۴}{۵}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

۷ نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B مطابق شکل به‌صورت خط راست و سهمی است. در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند، تندی متحرک B، $\frac{۱۶}{۳}$ برابر تندی متحرک A است. لحطه‌ای که جهت بردار مکان B عوض می‌شود، دو متحرک در چند متری از هم قرار دارند؟ سراسری- ۱۴۰۲



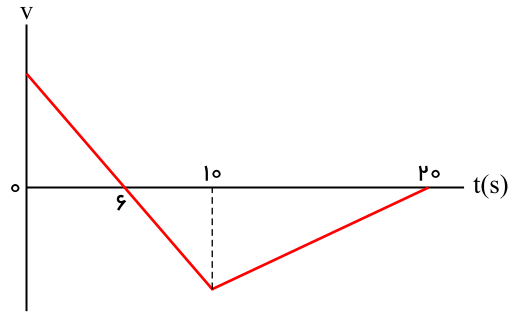
۱) ۸۸

۲) ۵۶

۳) ۴۲

۴) ۳۴

۸ نمودار سرعت زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر کل مسافت طی‌شده توسط متحرک $138m$ باشد، بزرگی شتاب متوسط در بازهٔ زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 12s$ چند متر بر مربع ثانیه است؟ سراسری- ۱۴۰۲



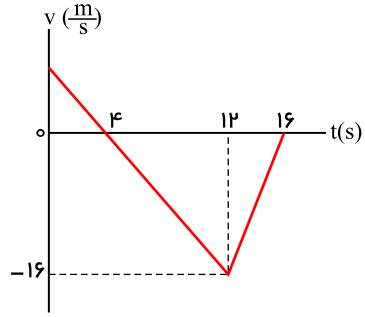
۱) ۲٫۱۶

۲) ۴٫۲۸

۳) ۲٫۴

۴) ۴٫۶

۹ شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. تندی متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 13s$ چند متر بر ثانیه است؟ خارج از کشور- ۱۴۰۲



۱) ۷٫۹

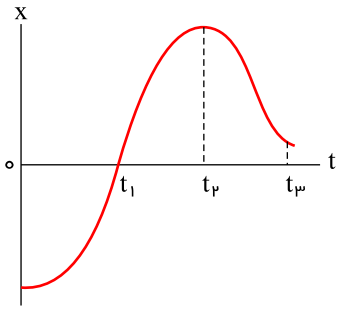
۲) ۷٫۷

۳) ۸٫۳

۴) ۸٫۱

۱۰ نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل زیر است. در کدام لحظهٔ نشان‌داده‌شده، تندی بیشتر است؟

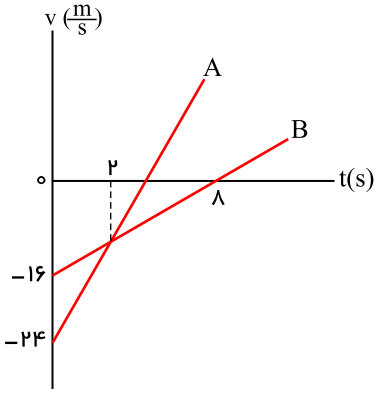
خارج از کشور- ۱۴۰۲



۱) t_1 ۲) t_2 ۳) t_3 ۴) $t = 0$

۱۱ دو متحرک در مبدأ زمان، از مبدأ محور می‌گذرند و نمودار سرعت ـ زمان آنها مطابق شکل است. در بازهٔ زمانی که دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند، فاصلهٔ بین آنها چگونه تغییر می‌کند؟

سراسری- ۱۴۰۲



۱) ۴۸ متر افزایش می‌یابد.
۲) ۴۸ متر کاهش می‌یابد.
۳) ۶۴ متر افزایش می‌یابد.
۴) ۶۴ متر کاهش می‌یابد.

۱۲ متحرکی در مبدأ زمان با سرعت ثابت $(۸\frac{m}{s})\vec{i}$ از مبدأ محور می‌گذرد، در همان لحظه متحرک دیگری از مکان $x = ۷m$ از حال سکون با شتاب ثابت $\vec{a} = (۲\frac{m}{s^۲})\vec{i}$ حرکت می‌کند. فاصلهٔ بین این دو متحرک چند بار ۵ متر می‌شود؟

خارج از کشور- ۱۴۰۲

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

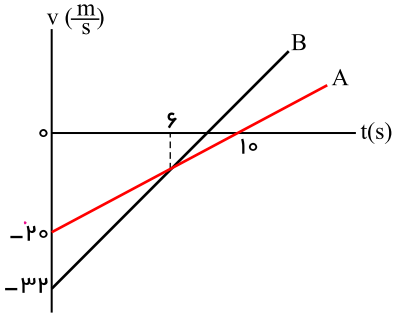
۱۳ یک اتومبیل و یک کامیون به فاصلهٔ d از هم قرار دارند. در لحظهٔ $t = ۰$ هر دو از حال سکون در جهت محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کنند. شتاب اتومبیل و کامیون به‌ترتیب $۱٫۵\frac{m}{s^۲}$ و $۲٫۵\frac{m}{s^۲}$ است. پس از آنکه اتومبیل مسافت ۷۵ متر را طی می‌کند، کامیون از آن سبقت می‌گیرد. در لحظهٔ $t = ۱۵s$ فاصلهٔ آنها از هم چند متر است؟

خارج از کشور- ۱۴۰۲

۱) ۱۲٫۵ ۲) ۶۲٫۵ ۳) ۱۱۲٫۵ ۴) ۱۶۲٫۵

۱۴ شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک است که در مبدأ زمان از مبدأ محور می‌گذرند. در بازهٔ زمانی که دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند، فاصلهٔ بین آنها چگونه تغییر می‌کند؟

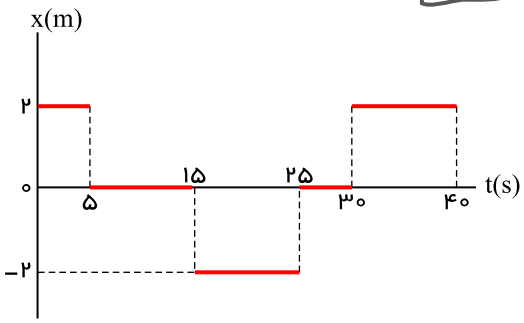
خارج از کشور- ۱۴۰۲



۱) ۸ متر کاهش می‌یابد.
۲) ۸ متر افزایش می‌یابد.
۳) ۱۲ متر افزایش می‌یابد.
۴) ۱۲ متر کاهش می‌یابد.

۱۵ نمودار شتاب ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر $\vec{v_0} = (-۵\frac{m}{s})\vec{i}$ باشد، کدام مورد در بازهٔ زمانی $t_1 = ۰s$ تا $t_2 = ۴۰s$ درست است؟

سراسری- ۱۴۰۲



۱) ۱۵ ثانیه شتاب و سرعت هم‌جهت‌اند.

۲) بزرگی جابه‌جایی متحرک برابر ۱۵۰ متر است.

۳) ۱۵ ثانیه متحرک در جهت محور x حرکت کرده است.

۴) مسافت طی‌شده توسط متحرک ۲۶۲٫۵ متر است.

۱۶ در یک مسیر مستقیم و از یک نقطه، متحرک A در مبدأ زمان با شتاب ثابت a از حال سکون به حرکت در می‌آید و در لحظهٔ $t = ۲s$ متحرک B از همان نقطه و در همان مسیر با شتاب ثابت $a + ۰٫۵\frac{m}{s^2}$ از حال سکون به حرکت درمی‌آید. اگر در لحظهٔ $t = ۶s$ دو متحرک به هم برسند، فاصلهٔ آنها در لحظهٔ $t = ۱۰s$ چند متر است؟

سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۴٫۴ ۲) ۸٫۸ ۳) ۱۲٫۴ ۴) ۲۴٫۸

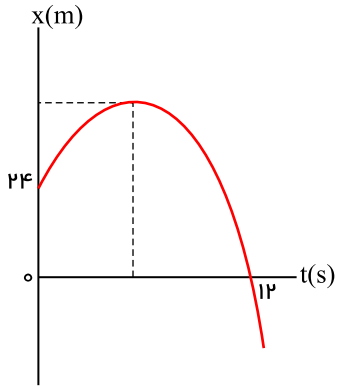
۱۷ متحرکی روی خط راست، با شتاب ثابت از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. در بازهٔ زمانی $t_1 = ۱s$ تا $t_2 = ۳s$ مسافت $۲۰m$ را طی می‌کند. مسافتی که در بازهٔ زمانی $t_2 = ۳s$ تا $t_3 = ۷s$ طی می‌کند، چند متر است؟

سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۴۰ ۲) ۸۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۰

۱۸ نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظهٔ $t = ۵s$ جهت حرکت تغییر کند، تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = ۲s$ تا $t_2 = ۱۰s$ چند متر بر ثانیه است؟

سراسری- ۱۴۰۲



۱) $\frac{۱۷}{۴}$ ۲) $\frac{۱۵}{۴}$ ۳) ۲ ۴) ۸

۱۹ خودرو A با سرعت ثابت $۸\frac{m}{s}$ در مسیر مستقیم در حرکت است و پشت سر آن خودرو B با سرعت ثابت $۲۰\frac{m}{s}$ در همان جهت حرکت می‌کند. وقتی فاصلهٔ بین آنها به ۴۶ متر کاهش می‌یابد، خودرو A با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^2}$ سرعت خود را کم می‌کند و یک ثانیهٔ بعد خودرو B نیز با شتاب ثابت $۴\frac{m}{s^2}$ سرعت خود را کم می‌کند. سرعت خودرو B در لحظهٔ رسیدن به خودرو A چند متر بر ثانیه است؟

سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۰ دو متحرک با تندی ثابت v_1 و $v_2 > v_1$ روی خط راست طوری حرکت می‌کنند که اگر خلاف جهت هم بروند، فاصلهٔ آنها در هر ثانیه ۱۶ متر تغییر می‌کند و اگر هم‌جهت حرکت کنند، فاصلهٔ آنها در هر دقیقه ۲۴۰ متر تغییر می‌کند. $\frac{v_2}{v_1}$ کدام است؟

خارج از کشور- ۱۴۰۲

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۵}$

۲۱ متحرکی روی محور x با سرعت اولیهٔ $\vec{v_0} = (۴۰\frac{m}{s})\vec{i}$ و شتاب ثابت $\vec{a} = (-۵\frac{m}{s^2})\vec{i}$ در حال حرکت است. تندی متوسط متحرک در ۵ ثانیهٔ دوم، چند متر بر ثانیه است؟

خارج از کشور- ۱۴۰۲

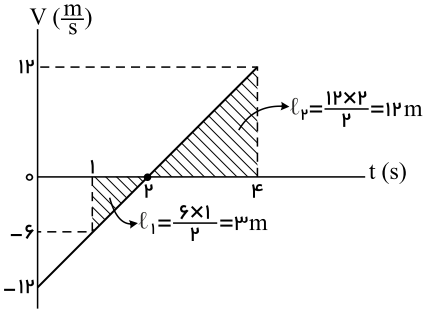
۱) ۲٫۵ ۲) ۶٫۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخنامه تشریحی

۱ **گزینه ۱** از معادلهٔ حرکت داده‌شده، معادلهٔ سرعت متحرک را تعیین می‌کنیم. پس از رسم نمودار سرعت - زمان، با تعیین سطح زیر نمودار، مسافت طی‌شده و در نهایت تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$x = ۳t^۲ - ۱۲t + ۹ \Rightarrow v = ۶t - ۱۲ \Rightarrow$$

t	v
۰	-۱۲
۱	-۶
۴	۱۲
۲	۰



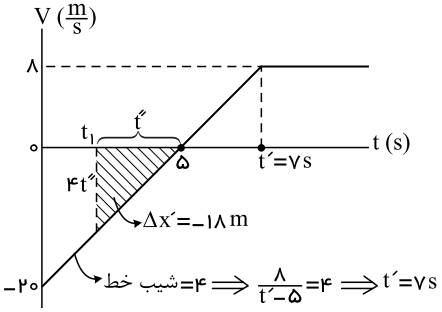
$$l = l_۱ + l_۲ = ۱۵m$$

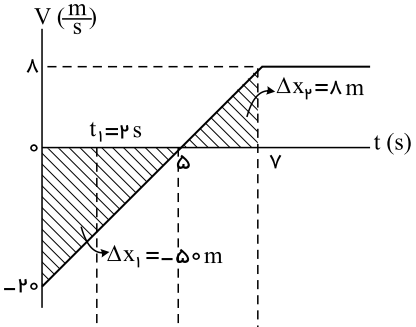
و در آخر داریم:

$$S_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۱۵}{۳} \Rightarrow S_{av} = ۵\frac{m}{s}$$

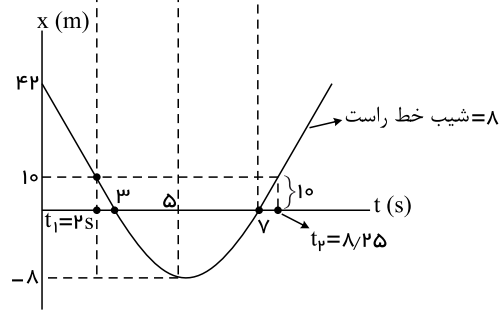
۲ **گزینه ۴** با توجه به مکان اولیه و سطح محصور بین نمودار $v - t$ و محور زمان، جابه‌جایی و لحظه و مکان توقف را می‌یابیم. سپس نمودار مکان - زمان را رسم کرده و مدت زمانی که فاصلهٔ متحرک از مبدأ کمتر یا مساوی $۱۰m$ است را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{قسمت هاشورخورده} : \Delta x' = -۱۸m \Rightarrow -\frac{t'' \times ۴t''}{۲} = -۱۸ \Rightarrow t'' = ۳s \xrightarrow{t''=۵-t_۱} t_۱ = ۲s$$





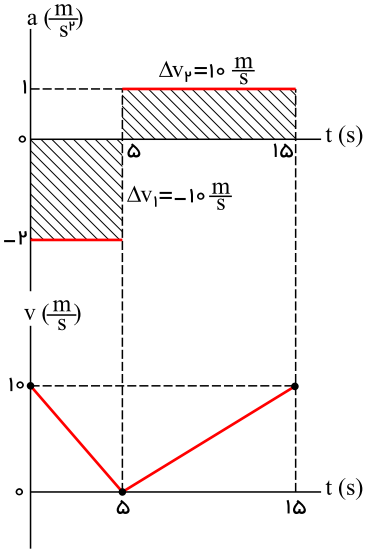
$$\text{خط راست با شیب ۸} \Rightarrow ۸ = \frac{۱۰}{\Delta t'} \Rightarrow \Delta t' = ۱/۲۵$$



مدت زمانی که فاصلهٔ متحرک از مبدأ کمتر یا مساوی ۱۰ متر بوده:

$$\Delta t = t_۲ - t_۱ = ۸/۲۵ - ۲ \Rightarrow \Delta t = ۶/۲۵s$$

۳ **گزینه ۲** اگر نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم کنیم، داریم:



با توجه به نمودار سرعت ـ زمان، متحرک تغییر جهت نمی‌دهد، پس جهت بردار سرعت آن تغییر نمی کند. (رد عبارت الف)

و از آنجا که متحرک در امتداد خط راست (محور x) حرکت می‌کند و تغییر جهت نمی‌دهد، مسافت و جابه‌جایی طی‌شده، هم‌اندازه هستند (درستی عبارت «ب»)

و با توجه به شتاب متوسط داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۱۰ - ۱۰}{۱۵} \Rightarrow a_{av} = ۰$$

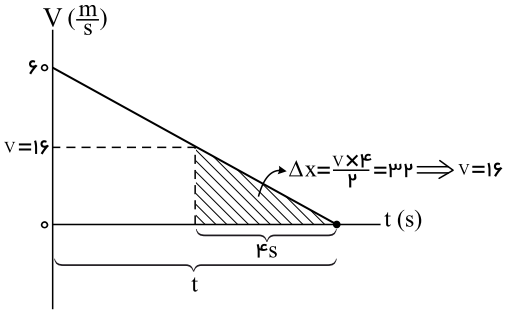
درستی عبارت «پ»

از طرفی متحرک تغییر جهت نمی‌دهد، پس سرعت متوسطش صفر نمی‌شود. (رد عبارت «ت»)

درنتیجه عبارت‌های «ب» و «پ» درست هستند.

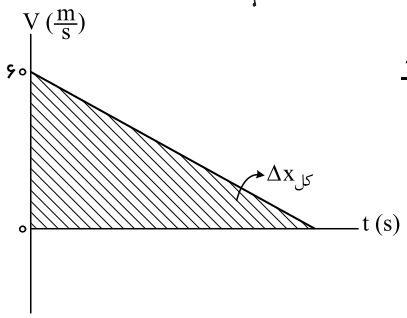
۴ **گزینه ۱**

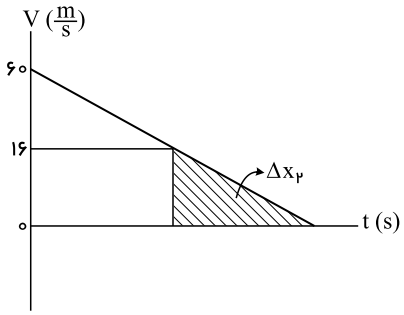
با رسم نمودار سرعت – زمان داریم:



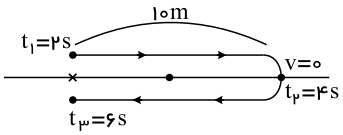
حال با توجه به اینکه نسبت مساحت‌های مثلث‌های متشابه با مجذور نسبت تشابه آنها برابر است، داریم:

$$\frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta x_{۲}} = (\frac{۶۰}{۱۶})^{۲} \Rightarrow \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{۳۲} = (\frac{۶۰}{۱۶})^{۲} \Rightarrow \Delta x_{\text{کل}} = ۴۵۰m$$





۵ **گزینه ۱** چون متحرک در حرکت با شتاب ثابت در امتداد خط راست، در لحظه‌های t_1 و t_3 در یک مکان قرار دارد، الزاماً در لحظهٔ t_2، $(t_2 = \frac{t_3 + t_1}{2})$ متوقف شده و برگشته است. پس نمودار مسیر حرکت آن به‌صورت زیر است.

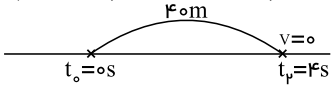


بین دو لحظهٔ $t_1 = ۲s$ و $t_2 = ۴s$ داریم:

$$\begin{cases} v = ۰ \\ \Delta x = -\frac{۱}{۲}at^{۲} \Rightarrow ۱۰ = -\frac{۱}{۲}(a)(۲)^{۲} \Rightarrow a = -۵\frac{m}{s} \end{cases}$$

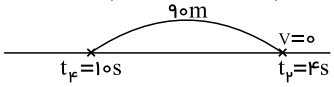
حال در ۴ ثانیهٔ اول داریم:

$$\begin{cases} v = ۰ \\ \Delta x = -\frac{۱}{۲}at^{۲} \Rightarrow \Delta x = -\frac{۱}{۲}(-۵)(۴)^{۲} \Rightarrow \Delta x = ۴۰m \end{cases}$$

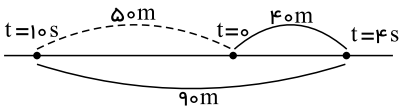


و بین دو لحظه $t_2 = ۴s$ و $t_4 = ۱۰s$ داریم:

$$\begin{cases} v = ۰ \\ \Delta x = -\frac{۱}{۲}at^{۲} \Rightarrow \Delta x' = -\frac{۱}{۲}(-۵)(۶)^{۲} \Rightarrow \Delta x' = ۹۰m \end{cases}$$



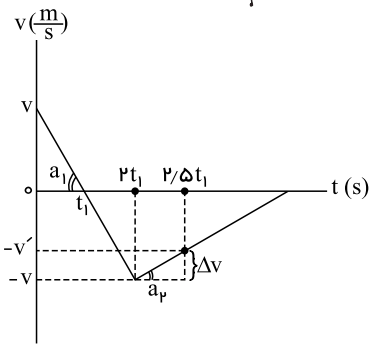
و در آخر داریم:



$$|\Delta x_{\text{کل}}| = |\Delta x' - \Delta x| = ۹۰ - ۴۰ = ۵۰m$$

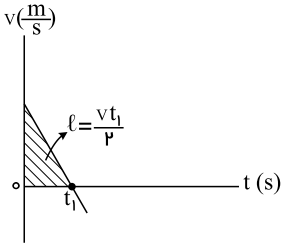
$$|v_{av}| = |\frac{\Delta x}{\Delta t}| = \frac{۵۰}{۱۰} \Rightarrow |v_{av}| = ۵\frac{m}{s}$$

۶ **گزینه ۳** با توجه به اینکه بزرگی شتاب در مرحلهٔ اول، دو برابر شتاب در مرحلهٔ دوم است، (قدرمطلق شیب خط در مرحلهٔ اول دو برابر شیب خط در مرحلهٔ دوم است) داریم:

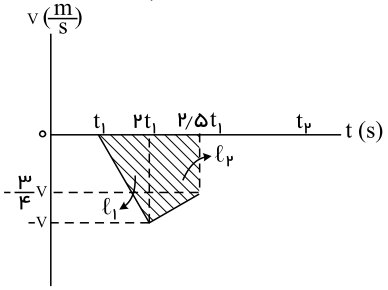


$$|a_1| = 2|a_2| \Rightarrow |\frac{v}{t_1}| = 2(\frac{\Delta v}{0/5t_1}) \Rightarrow |\Delta v| = \frac{1}{4}v \Rightarrow v - v' = \frac{1}{4}v \Rightarrow |v'| = \frac{3}{4}v$$

حال سطح محصور بین نمودار و محور زمان را در بازه‌های داده‌شده می‌یابیم و تندی متوسط هر مرحله را محاسبه می‌کنیم



$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\frac{vt_1}{2}}{t_1} = \frac{1}{2}v$$



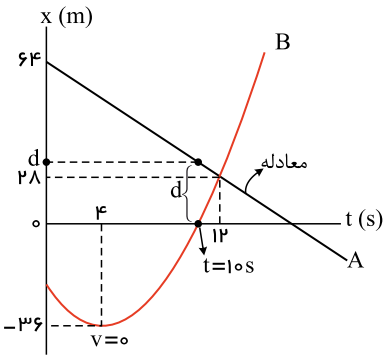
$$\ell_2 = \frac{v + \frac{3}{4}}{2} \times \frac{1}{2}t_1 \Rightarrow \ell_2 = \frac{7}{16}t_1 v$$

$$S'_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{(\frac{1}{2}t_1 + \frac{7}{16}t_1)v}{1/5t_1} \Rightarrow S'_{av} = \frac{5}{8}v$$

و در آخر داریم:

$$\frac{S_{av}}{S'_{av}} = \frac{\frac{1}{2}v}{\frac{5}{8}v} \Rightarrow \frac{S_{av}}{S'_{av}} = \frac{4}{5}$$

۷ **گزینه ۴** برای متحرک A که با سرعت ثابت حرکت می‌کند، داریم:



$$v_A = \text{شیب خط} = -\frac{۳۶}{۱۲} = -۳\frac{m}{s}$$

پس در لحظهٔ $t = ۱۲s$ داریم:

$$v_B = \frac{۱۶}{۳}|v_A| = \frac{۱۶}{۳} \times ۳ = ۱۶\frac{m}{s}$$

برای متحرک B که با شتاب ثابت حرکت می‌کند داریم: (بین $t = ۴s$ و $t = ۱۲s$)

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۱۶ - ۰}{۱۲ - ۴} \Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^۲}$$

ثانیهٔ اول ۴ : $v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = ۲ \times ۴ + v_۰ \Rightarrow v_۰ = -۸\frac{m}{s}$, $\Delta x = \frac{v + v_۰}{۲}\Delta t = \frac{۰ - ۸}{۲} \times ۴ = -۱۶$

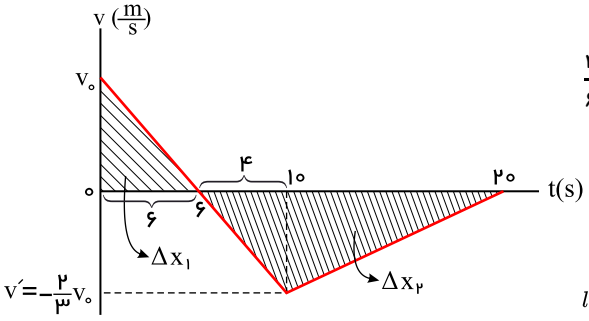
$\Rightarrow \Delta x = x - x_۰ \Rightarrow -۱۶ = -۳۶ - x_۰ \Rightarrow x_۰ = -۲۰$

لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان $x = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ = ۰ \Rightarrow t^۲ - ۸t - ۲۰ = ۰ \Rightarrow t = ۱۰s$

$x_A = v_At + x_{۰A} \Rightarrow d = -۳ \times ۱۰ + ۶۴ \Rightarrow d = ۳۴m$

۸ گزینه ۱

ابتدا سرعت متحرک را در لحظه‌های $t = ۰s$ و $t = ۱۰s$ می‌یابیم. با توجه به تشابه مثلث‌ها داریم:



$$\frac{۴}{۶} = \frac{v'}{v_۰} \xrightarrow{v'<۰} v' = -\frac{۲}{۳}v_۰$$

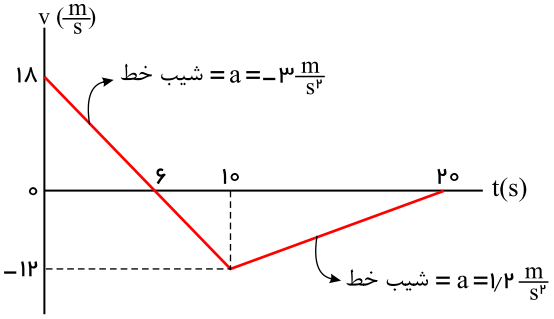
$$\Delta x_۱ = \frac{۶ \times v_۰}{۲} = ۳v_۰$$

$$\Delta x_۲ = \frac{(۲۰ - ۶) \times -\frac{۲}{۳}v_۰}{۲} \Rightarrow \Delta x_۲ = -\frac{۱۴}{۳}v_۰$$

$$l = \Delta x_۱ + |\Delta x_۲| = ۳v_۰ + \frac{۱۴}{۳}v_۰ = \frac{۲۳}{۳}v_۰$$

$$\xrightarrow{l=۱۳۸m} ۱۳۸ = \frac{۲۳}{۳}v_۰ \Rightarrow v_۰ = ۱۸\frac{m}{s}$$

یعنی نمودار سرعت ـ زمان به‌صورت زیر است:



برای لحظهٔ $t = ۲s$ داریم:

$$v = at + v_۰ = -۳t + ۱۸ \xrightarrow{t=۲s} v_۱ = -۳ \times ۲ + ۱۸ \Rightarrow v_۱ = ۱۲\frac{m}{s}$$

و برای لحظهٔ $t = ۱۲s$ داریم:

$$v = at + v_۰ = ۱/۲ \times ۲ - ۱۲ \Rightarrow v_۲ = -۹/۶\frac{m}{s}$$

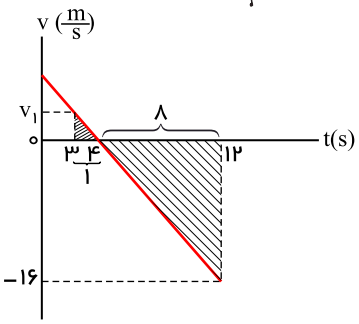
(دقت کنید که سرعت اولیه در مرحلهٔ دوم حرکت، همان سرعت در لحظهٔ $t = ۱۰s$ است.)

و در نهایت داریم:

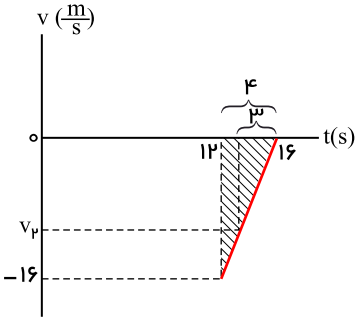
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{-۹/۶ - ۱۲}{۱۲ - ۲} = \frac{-۲۱/۶}{۱۰} \Rightarrow |a_{av}| = ۲/۱۶\frac{m}{s^۲}$$

۹ گزینه ۱

برای پیدا کردن تندی متوسط، باید مسافت طی‌شده، که در اینجا برابر با سطح محصور بین نمودار و محور زمان است، را پیدا کنیم؛ بنابراین با توجه به تشابه مثلث‌ها، سرعت متحرک در لحظه‌های $t_۱ = ۳s$ و $t_۲ = ۱۳s$ را می‌یابیم.

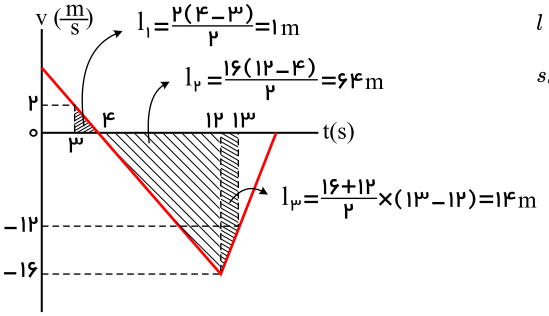


$$\frac{۱۶}{v_۱}=\frac{۸}{۱}\Rightarrow v_۱=۲\frac{m}{s}$$



$$\frac{-۱۶}{v_۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow v_۲=-۱۲\frac{m}{s}$$

حالا مسافت طی‌شده و بعد از آن تندی متوسط را می‌یابیم:

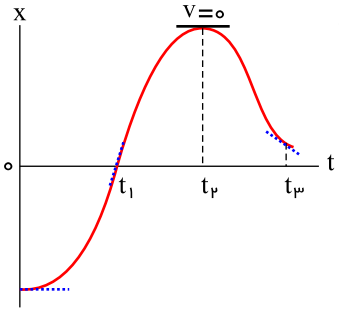


$$l=l_۱+l_۲+l_۳=۱+۶۴+۱۴=۷۹m$$

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{۷۹}{۱۰}\Rightarrow s_{av}=۷/۹\frac{m}{s}$$

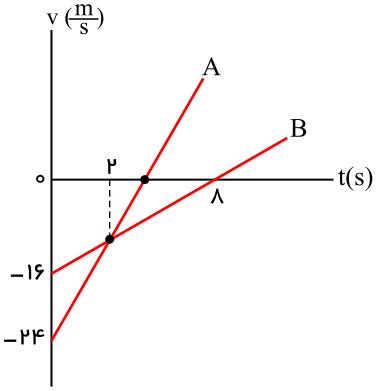
۱۰ گزینه ۱

می‌دانیم که قدرمطلق شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در هر لحظه، برابر تندی متحرک در آن لحظه است. با توجه به شکل، اندازهٔ شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t_۱$ بیشتر از بقیه است.



۱۱ گزینه ۳

نمودار سرعت ـ زمان داده‌شده برای هر دو متحرک یک خط با شیب ثابت است. پس حرکت هر دو متحرک، شتاب‌دار با شتاب ثابت است و معادلهٔ هر خط، همان معادلهٔ سرعت متحرک است.



برای متحرک B (شیب خط = شتاب):

$$a_B = \frac{۱۶}{۸} = ۲\frac{m}{s} \qquad v = at + v_۰ \Rightarrow v_B = ۲t - ۱۶$$

در لحظهٔ $t = ۲s$ داریم: $(v_A = v_B)$

$$v_B = ۲t - ۱۶ \xrightarrow{t=۲s} v_B = ۲ \times ۲ - ۱۶ \Rightarrow v_B = -۱۲\frac{m}{s} = v_A$$

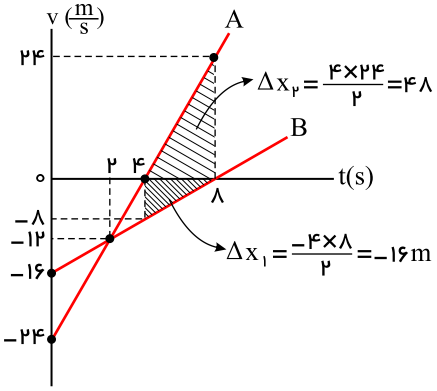
و برای متحرک A:

$$v_A = a_A t + v_{۰_A} \xrightarrow[v_A=-۱۲\frac{m}{s}]{t=۲s} -۱۲ = a_A \times ۲ - ۲۴ \Rightarrow a_A = ۶\frac{m}{s^۲} \Rightarrow v_A = ۶t - ۲۴$$

در لحظه‌ای که متحرک A تغییر جهت می‌دهد، داریم:

$$v_A = ۶t - ۲۴ \xrightarrow{v_A=۰} ۰ = ۶t - ۲۴ \Rightarrow t = ۴s$$

حال می‌دانیم که بین $t = ۴s$ و $t = ۸s$، متحرک A در جهت محور و متحرک B در خلاف جهت محور حرکت می‌کنند. می‌دانیم که سطح زیر نمودار برابر جابه‌جایی است، پس داریم:



$$v_A = ۶t - ۲۴ \xrightarrow{t=۸s}$$

$$v_A = ۶ \times ۸ - ۲۴ \Rightarrow v_A = ۲۴\frac{m}{s}$$

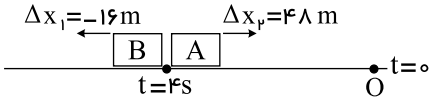
$$v_B = ۲t - ۱۶ \xrightarrow{t=۴s} v_B = ۲ \times ۴ - ۱۶ = -۸\frac{m}{s}$$

A متحرک : $\Delta x = \Delta x_۲ = ۴۸m$

B متحرک : $\Delta x = \Delta x_۱ = -۱۶m$

فاصلهٔ دو متحرک از هم : $۴۸ - (-۱۶) = ۶۴m$

دقت کنید که در لحظهٔ $t = ۴s$ هر دو متحرک در یک مکان هستند.



۱۲ گزینه ۴

با توجه به نوع حرکت هر متحرک، معادلهٔ حرکت آنها را می‌نویسیم.

$$x = vt + x_۰ \xrightarrow[x_۰=۰]{v=۸\frac{m}{s}} x_۱ = ۸t$$

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰ t + x_۰ \xrightarrow[v_۰=۰, a=۲\frac{m}{s^۲}]{x_۰=۷m} x_۲ = t^۲ + ۷$$

برای اینکه فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر برابر $۵m$ شود، دو حالت پیش می‌آید:

حالت اول:

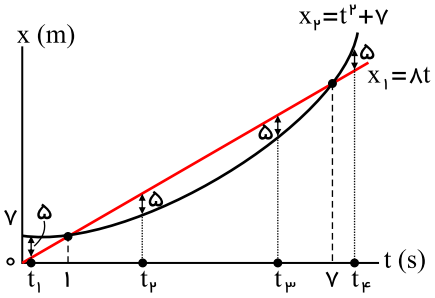
$$x_۲ - x_۱ = ۵ \to t^۲ + ۷ - ۸t = ۵ \to t^۲ - ۸t + ۲ = ۰ \to t_۱ = \frac{۸ + \sqrt{۵۶}}{۲} s \, , t_۲ = \frac{۸ - \sqrt{۵۶}}{۲} s$$

حالت دوم:

$$x_۱ - x_۲ = ۵ \to ۸t - t^۲ - ۷ = ۵ \to t^۲ - ۸t + ۱۲ = ۰ \to t_۳ = ۲s \, , t_۴ = ۶s$$

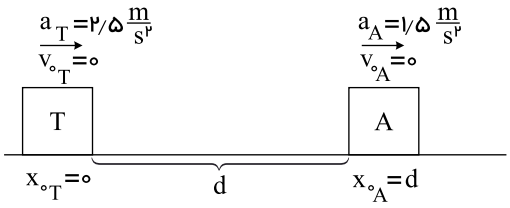
بنابراین در چهار لحظه، فاصلهٔ دو متحرک از هم به $۵m$ می‌رسد.

(اگر هر دو حالت را در نظر نگیرید، به اشتباه به گزینهٔ «۲» می‌رسید که غلط است!)



۱۳ گزینه ۲

در ابتدا یک شکل از وضعیت قرار گرفتن اتومبیل A و کامیون T در لحظهٔ $t = ۰$ رسم می‌کنیم.



مدت زمان حرکت اتومبیل برای جابه‌جایی ۷۵ متر را می‌یابیم.

$$\Delta x_A = \frac{۱}{۲} a_A t^۲ + v_{۰A} t \Rightarrow ۷۵ = \frac{۱}{۲} \times ۱/۵ \times t^۲ + ۰ \Rightarrow t = ۱۰s$$

یعنی در $t = ۱۰s$ دو متحرک به هم می‌رسند. در این مدت، جابه‌جایی کامیون برابر است با:

$$\Delta x_T = \frac{۱}{۲} a_T t^۲ + v_۰ t \xrightarrow{\Delta x_T = d + ۷۵} d + ۷۵ = \frac{۱}{۲} \times ۲/۵ \times ۱۰^۲ + ۰$$
$$\Rightarrow d = ۵۰m$$

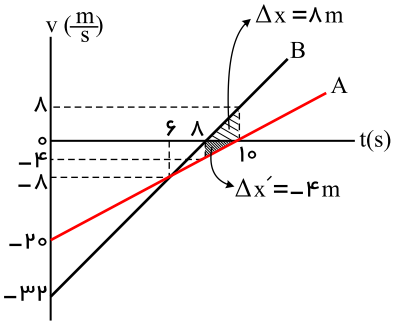
حال معادلهٔ حرکت هریک را نوشته و در لحظهٔ $t = ۱۵s$ فاصلهٔ آنها را از هم، به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} v_۰ = ۰ \\ x = \frac{۱}{۲} a t^۲ + x_۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_T = \frac{۱}{۲} \times ۲/۵ \times (۱۵)^۲ \\ x_A = \frac{۱}{۲} \times ۱/۵ \times (۱۵)^۲ + ۵۰ \end{cases}$$

$$x_T - x_A = \frac{۱}{۲} \times (۲/۵ - ۱/۵) \times (۱۵)^۲ - ۵۰ \Rightarrow \Delta x = ۶۲/۵m$$

۱۴ گزینه ۴ در بازهٔ زمانی که دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند، متحرک B در جهت محور و متحرک A در خلاف جهت محور حرکت می‌کند؛ پس در ابتدا لحظهٔ توقف و تغییر جهت B را می‌یابیم. برای این کار، مرحله به مرحله به‌صورت زیر پیش می‌رویم:

(۱)



$$a_A = A \text{ شیب خط} = \frac{۰ - (-۲۰)}{۱۰} = ۲ \frac{m}{s}$$
$$v = at + v_۰ \Rightarrow v_A = ۲t - ۲۰$$
$$\begin{cases} t = ۶s \\ v_B = v_A = ۲ \times ۶ - ۲۰ = -۸ \frac{m}{s} \end{cases}$$

(۲)

$a_B = B$ شیب خط $= \dfrac{-۸ - (-۳۲)}{۶} = ۴\dfrac{m}{s^۲}$

$v = at + v_۰ \Rightarrow v_B = ۴t - ۳۲$

B لحظهٔ تغییر جهت متحرک $\begin{cases} v_B = ۰ \\ ۰ = ۴t - ۳۲ \end{cases} \Rightarrow t = ۸s$

سرعت متحرک A در لحظهٔ $t = ۸s$:

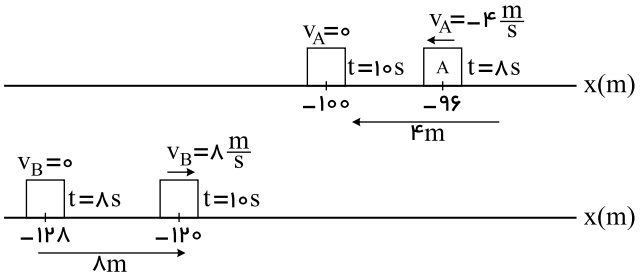
$v_A = ۲t - ۲۰ \xrightarrow{t=۸s} v_A = ۲(۸) - ۲۰ = -۴\dfrac{m}{s}$

سرعت متحرک B در لحظهٔ $t = ۱۰s$:

$v_B = ۴t - ۳۲ \xrightarrow{t=۱۰s} v_B = ۸\dfrac{m}{s}$

(۳) قدرمطلق سطح محصور بین نمودارهای A و B با محور زمان، در بازهٔ زمانی $t = ۸s$ تا $t = ۱۰s$، جابه‌جایی آنها نسبت به هم را نشان می‌دهد که برابر ۱۲ متر است.

در این مدت دو متحرک به هم نزدیک می‌شوند، پس فاصلهٔ آنها ۱۲ متر از هم کم می‌شود.

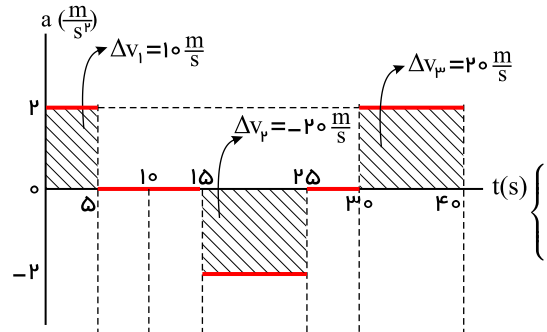


۱۵ گزینه ۴

وقتی سؤالی در مورد تحلیل حرکت متحرک مطرح می‌شود، یکی از بهترین راه‌حل‌ها، رسم نمودار سرعت ـ زمان است تا با استفاده از آن بتوان حرکت را تحلیل کرد. پس در اینجا نمودار سرعت ـ زمان را رسم می‌کنیم.

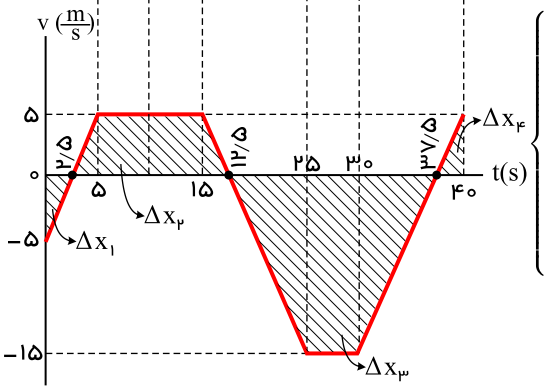
با توجه به نمودار، هر گزینه را بررسی می‌کنیم:

۱) در مدتی که حرکت تندشونده است، شتاب و سرعت هم‌جهت‌اند؛ در اینجا:



$\begin{cases} \Delta t_۱ = (۵ - ۲٫۵) = ۲٫۵s \\ \Delta t_۲ = (۲۵ - ۱۷٫۵) = ۷٫۵s \\ \Delta t_۳ = (۴۰ - ۳۷٫۵) = ۲٫۵s \end{cases} \Rightarrow \Delta t = ۱۲٫۵s$

۲) جابه‌جایی متحرک برابر است با سطح محصور بین نمودار سرعت ــ زمان و محور زمان؛ در اینجا:



$\begin{cases} \Delta x_۱ = \dfrac{-۲٫۵ \times ۵}{۲} = -۶٫۲۵m \\ \Delta x_۲ = \dfrac{۱۵ + ۱۰}{۲} \times ۵ = ۶۲٫۵m \\ \Delta x_۳ = -\dfrac{۲۰ + ۵}{۲} \times ۱۵ = -۱۸۷٫۵ \\ \Delta x_۴ = \dfrac{۲٫۵ \times ۵}{۲} = ۶٫۲۵ \end{cases} \Rightarrow \Delta x = -۱۲۵m \Rightarrow |\Delta x| = ۱۲۵m$

۳) هنگامی که متحرک در جهت محور حرکت کرده، $v > ۰$ است؛ یعنی:

$\begin{cases} \Delta t_۱ = ۱۷٫۵ - ۲٫۵ = ۱۵s \\ \Delta t_۲ = ۴۰ - ۳۷٫۵ = ۲٫۵s \end{cases} \Rightarrow \Delta t = ۱۷٫۵s$

۴) مسافت طی‌شده برابر است با:

$l = |-۶٫۲۵| + ۶۲٫۵ + |-۱۸۷٫۵| + ۶٫۲۵ \Rightarrow l = ۲۶۲٫۵m$

۱۶ گزینه ۲ چون دو متحرک از یک نقطه شروع به حرکت می‌کنند، فرض می‌کنیم که مکان اولیهٔ آنها مبدأ مکان یعنی $x_۰ = ۰$ باشد. چون در لحظهٔ $t = ۶s$ مجدداً به هم می‌رسند، مکان آنها یکسان است، یعنی $x_A = x_B$ است. پس معادلهٔ حرکت هر یک را می‌نویسیم. دقت کنید چون متحرک B، دو ثانیه بعد از متحرک A شروع به حرکت کرده، اگر زمان حرکت متحرک A را t فرض کنیم، زمان حرکت متحرک B دو ثانیه کمتر، یعنی $(t - ۲)$ است.

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow[v_0=0]{x_0=0} \begin{cases} x_A=\frac{1}{2}at^2 \\ x_B=\frac{1}{2}(a+0/5)(t-2)^2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{t=6s} \begin{cases} x_A=\frac{1}{2}a(6)^2 \\ x_B=\frac{1}{2}(a+0/5)(6-2)^2 \end{cases} \xrightarrow{x_A=x_B} 18a=8(a+0/5)\Rightarrow a=0/4\frac{m}{s^2}$$

حال مکان هر یک را در لحظهٔ $t=10s$ محاسبه کرده و فاصلهٔ آنها را از هم می‌یابیم.

$$x=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \begin{cases} x_A=\frac{1}{2}\times 0/4\times(10)^2 \\ x_B=\frac{1}{2}\times(0/4+0/5)(8)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A=20m \\ x_B=28/8m \end{cases}$$

$$\Delta x=x_B-x_A=28/8-20\Rightarrow \Delta x=8/8m$$

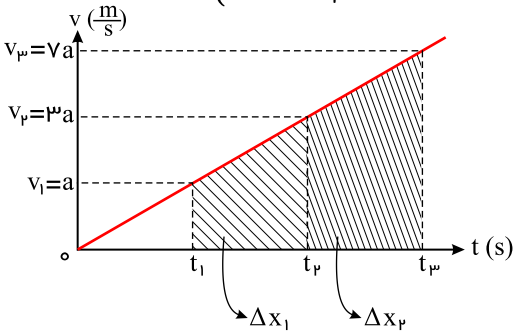
۱۷ **گزینه ۳** از آنجا که متحرک از حال سکون با شتاب ثابت در امتداد خط راست شروع به حرکت کرده، الزاماً حرکت تندشونده دارد و مسافت طی‌شده با اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر است. با استفاده از رابطهٔ سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$v=at+v_0 \xrightarrow{v_0=0} v=at\Rightarrow \begin{cases} t_1=1s\Rightarrow v_1=a \\ t_2=3s\Rightarrow v_2=3a \\ t_3=7s\Rightarrow v_3=7a \end{cases}$$

از طرفی برای حرکت با شتاب ثابت در امتداد خط راست داریم:

$$\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t\Rightarrow \begin{cases} 20=\frac{a+3a}{2}\times(3-1) \\ \Delta x=\frac{7a+3a}{2}\times(7-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ \Delta x=100m \end{cases}$$

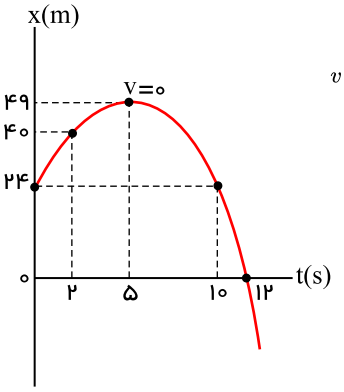
روش دوم: با استفاده از نمودار سرعت ـ زمان نیز می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد:



$$\Delta x_1=20=\frac{3a+a}{2}\times 2\Rightarrow a=5$$

$$\Delta x_2=\frac{7a+3a}{2}\times 4\xrightarrow{a=5}\Delta x_2=100m$$

۱۸ **گزینه ۱**



در لحظهٔ تغییر جهت، متحرک متوقف می‌شود؛ پس لحظهٔ $t=5s$ مربوط به رأس سهمی است. حال بین دو لحظهٔ $t=0s$ و $t=5s$ داریم:

$$v=at+v_0 \xrightarrow[t=5]{v=0} 5a+v_0=0 \qquad (1)$$

و در ۱۲ ثانیهٔ اول داریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \xrightarrow[t=12s]{\Delta x=-24m} -24=72a+12v_0\Rightarrow 6a+v_0=-2 \qquad (2)$$

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{cases} 5a+v_0=0 \\ 6a+v_0=-2 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=-2\frac{m}{s^2} \\ v_0=10\frac{m}{s} \end{cases}$$

بدیهی است که با توجه به تقارن نسبت به رأس سهمی، متحرک در لحظهٔ $t=10s$ مجدداً در مکان $x=24m$ است. برای لحظهٔ $t=2s$ داریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0=\frac{1}{2}(-2)(2)^2+10\times 2+24\Rightarrow x_2=40m$$

و در $t = ۵s$:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ = \frac{۱}{۲}(-۲)(۵)^۲ + ۱۰ \times ۵ + ۲۴ \Rightarrow x_۵ = ۴۹m$$

پس بین دو لحظه $t = ۲s$ و $t = ۱۰s$ متحرک از مکان $x_۲ = ۴۰m$ به مکان $x_۵ = ۴۹m$ رفته و تا مکان $x_{۱۰} = ۲۴m$ برگشته است. برای تعیین تندی متوسط داریم:

$$l = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| = (۴۹ - ۴۰) + |۲۴ - ۴۹| = ۳۴m$$

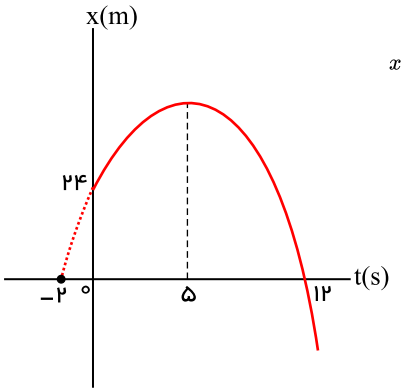
$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۳۴}{۸} \Rightarrow s_{av} = \frac{۱۷}{۴}\frac{m}{s}$$

روش دوم: با توجه به خاصیت تقارن نسبت به رأس سهمی، بدیهی است که معادلهٔ این سهمی (همان معادلهٔ مکان ـ زمان) به‌صورت زیر است:

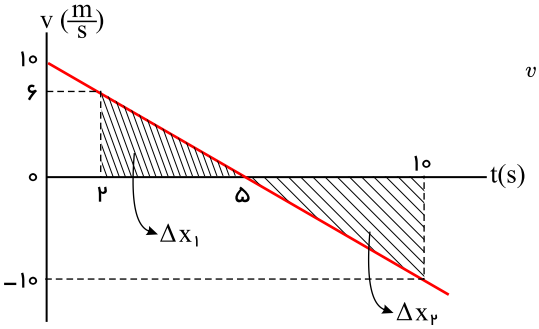
$$x = -(t + ۲)(t - ۱۲) \Rightarrow x = -t^۲ + ۱۰t + ۲۴$$

یعنی:

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \\ x = -t^۲ + ۱۰t + ۲۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ v_۰ = ۱۰ \\ x_۰ = ۲۴ \end{cases}$$



حال با رسم نمودار سرعت ـ زمان داریم:



$$v = at + v_۰ \xrightarrow{t=۲s} v = ۲(-۲) + ۱۰ = ۶\frac{m}{s}$$

$$\Delta x_۱ = \frac{(۵ - ۲) \times ۶}{۲} = ۹m$$

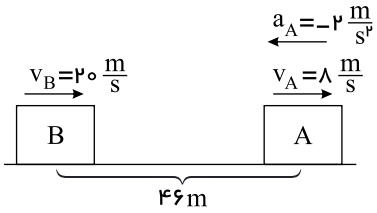
$$\Delta x_۲ = \frac{-۱۰ \times (۱۰ - ۵)}{۲} = -۲۵m$$

$$l = \Delta x_۱ + |\Delta x_۲| = ۹ + ۲۵ = ۳۴$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۳۴}{۸} \Rightarrow s_{av} = \frac{۱۷}{۴}\frac{m}{s}$$

۱۹ **گزینه ۲** با توجه به طولانی بودن متن سوال، سعی می‌کنیم که شکل سوال را مرحله به مرحله رسم کنیم و به تحلیل سوال بپردازیم.

در مرحلهٔ اول داریم:



دقت کنید که حرکت متحرک A کندشونده است.

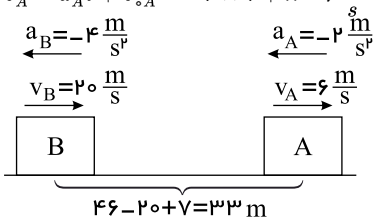
در مدت یک ثانیه، جابه‌جایی هر یک را می‌یابیم.

$$\Delta x_A = \frac{۱}{۲}a_At^۲ + v_{۰A}t = \frac{۱}{۲}(-۲)(۱)^۲ + ۸ \times ۱ = ۷m$$

$$\Delta x_B = v_Bt = ۲۰ \times ۱ = ۲۰m$$

پس از یک ثانیه از شروع حرکت کندشوندهٔ A داریم:

$$v_A = a_At + v_{۰A} = -۲ \times ۱ + ۸ = ۶\frac{m}{s}$$



از اینجا به بعد، معادلهٔ حرکت هریک را می‌نویسیم تا لحظهٔ به هم رسیدن آنها را بیابیم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow[x_{0A}=33m]{x_{0B}=0} \begin{cases} x_A=\frac{1}{2}(-2)t^2+6t+33 \\ x_B=\frac{1}{2}(-4)t^2+20t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A=-t^2+6t+33 \\ x_B=-2t^2+20t \end{cases} \xrightarrow{x_A=x_B} -t^2+6t+33=-2t^2+20t$$

$$\Rightarrow t^2-14t+33=0 \Rightarrow \begin{cases} t_1=3s \\ t_2=11s \end{cases}$$

پس در $t_1=3s$ خودروی B به A می‌رسد. در این لحظه داریم:

$$v=at+v_0 \Rightarrow v_B=-4\times 3+20 \Rightarrow v_B=8\frac{m}{s}$$

سؤال: از کجا فهمیدید که در $t=11s$ به هم نمی‌رسند؟

پاسخ: با توجه به اینکه وقتی دو متحرک در فاصلهٔ ۳۳ متری هم هستند، حرکت آنها کندشونده است، متحرک A بعد از $t_{S_A}=|\frac{v_{0A}}{a_A}|=\frac{6}{2}=3s$

و متحرک B بعد از $t_{S_B}=|\frac{v_{0B}}{a_B}|=\frac{20}{4}=5s$ متوقف می‌شوند؛ پس حرکت آنها کمتر از ۱۱ ثانیه طول می‌کشد.

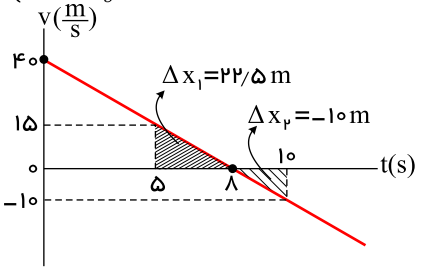
۲۰ **گزینه ۳** فاصلهٔ بین دو متحرک در دو حالت، به صورت زیر تغییر می‌کند (با توجه به گزینه‌ها، $v_2>v_1$ است؛ بنابراین در حالت دوم، اختلاف سرعت‌ها برابر v_2-v_1 است، نه v_1-v_2):

$$\begin{matrix} \text{وقتی در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند: } \Delta x=(v_2+v_1)t \\ \text{وقتی در یک جهت حرکت می‌کنند: } \Delta x'=(v_2-v_1)t \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 16=(v_2+v_1)\times 1 \\ 240=(v_2-v_1)\times 60 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16=v_2+v_1 \\ 4=v_2-v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2=10\frac{m}{s} \\ v_1=6\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

۲۱ **گزینه ۲** در ابتدا معادلهٔ سرعت متحرک را نوشته و نمودار سرعت ـ زمان را رسم می‌کنیم و با استفاده از سطح محصور بین نمودار و محور زمان، مسافت طی‌شده و در آخر، تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} v_0=40\frac{m}{s} \\ a=-5\frac{m}{s^2} \end{cases} \xrightarrow{v=at+v_0} v=-5t+40$$



t	v
0	40
8	0
5	15
10	−10

$$l=\Delta x_1+|\Delta x_2|=22/5+10=32/5m$$

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{32/5}{5} \Rightarrow s_{av}=6/5\frac{m}{s}$$

(تذکر: ۵ ثانیهٔ دوم یعنی بین دو لحظهٔ $t_1=5s$ و $t_2=10s$)

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۶	۳	۱۱	۳	۱۶	۲	۲۱	۲
۲	۴	۷	۴	۱۲	۴	۱۷	۳		
۳	۲	۸	۱	۱۳	۲	۱۸	۱		
۴	۱	۹	۱	۱۴	۴	۱۹	۲		
۵	۱	۱۰	۱	۱۵	۴	۲۰	۳		